ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
29. siječnja 2015.

5. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:
$149 \cdot 76 - (55 - 5 \cdot 3) \cdot (100 - 6 \cdot 4) + 76 \cdot 291 =$
$=149 \cdot 76 - (55 - 15) \cdot (100 - 24) + 76 \cdot 291 =$ 1 BOD
$=149 \cdot 76 - 40 \cdot 76 + 76 \cdot 291 =$ 1 BOD
$=76 \cdot (149 - 40 + 291) =$ 1 BOD
$=76 \cdot (109 + 291) =$ 1 BOD
$=76 \cdot 400 =$ 1 BOD
$=30\,400$ 1 BOD
…………………………………………………………………….. UKUPNO 6 BODOVA
Drugi način:
$149 \cdot 76 - (55 - 5 \cdot 3) \cdot (100 - 6 \cdot 4) + 76 \cdot 291 =$
$=149 \cdot 76 - (55 - 15) \cdot (100 - 24) + 76 \cdot 291 =$ 1 BOD
$=149 \cdot 76 - 40 \cdot 76 + 76 \cdot 291 =$ 1 BOD
$=11324 - 3040 + 22116=$ 2 BODA
$=8284 + 22116=$ 1 BOD
$=30400$ 1 BOD
…………………………………………………………………….. UKUPNO 6 BODOVA

2. Prirodni broj je neparan ako mu je znamenka jedinice 1, 3, 5, 7 ili 9. 1 BOD
Da bi broj bio najmanji mogući znamenke mu trebaju biti 1 i 0, a da bi bio najveći mogući znamenke mu trebaju biti 9 i 8. 1 BOD
Najmanji peteroznamenkasti neparni prirodni broj kojemu su 3 znamenke neparne, a 2 parne je broj 10011. 2 BODA
Najveći peteroznamenkasti neparni prirodni broj kojemu su 3 znamenke neparne, a 2 parne je broj 99889. 2 BODA
…………………………………………………………..…………… UKUPNO 6 BODOVA
Napomena: Točni odgovori bez obrazloženja donose po 2 boda.

3. Prvi način:
Ako podijelimo umnožak sva tri broja s umnoškom prvog i trećeg broja, dobit ćemo drugi broj.
Drugi broj je 13600 : 544 = 25. 2 BODA
Ako podijelimo umnožak sva tri broja s umnoškom drugog i trećeg broja, dobit ćemo prvi broj.
Prvi broj je 13600 : 425 = 32. 2 BODA
Traženi umnožak prvog i drugog broja je $32 \cdot 25 = 800$. 2 BODA
…………………………………………………………..………… UKUPNO 6 BODOVA
Drugi način:
Ako je *a* prvi broj, *b* drugi broj, a *c* treći broj, onda vrijedi
$a \cdot b \cdot c = 13600$
$a \cdot c = 544$ 1 BOD
$b \cdot c = 425.$
Iz 1. i 2. jednakosti slijedi $544 \cdot b = 13600$ odnosno $b = 13600 : 544 = 25$. 2 BODA
Iz 1. i 3. jednakosti slijedi $425 \cdot a = 13600$ odnosno $a = 13600 : 425 = 32$. 2 BODA
Traženi umnožak prvog i drugog broja je $a \cdot b = 32 \cdot 25 = 800$. 1 BOD
…………………………………………………………..………… UKUPNO 6 BODOVA

Treći način:
Ako je a prvi broj, b drugi broj, a c treći broj, onda vrijedi

$a \cdot b \cdot c = 13600$

$a \cdot c = 544$ 1 BOD

$b \cdot c = 425.$

Kako je 13600 = 2 · 2 · 2 · 2 · 2 · 5 · 5 · 17, 544 = 2 · 2 · 2 · 2 · 2 · 17 i 425 = 5 · 5 · 17, 2 BODA
onda vrijedi

$a \cdot b \cdot c = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 17$

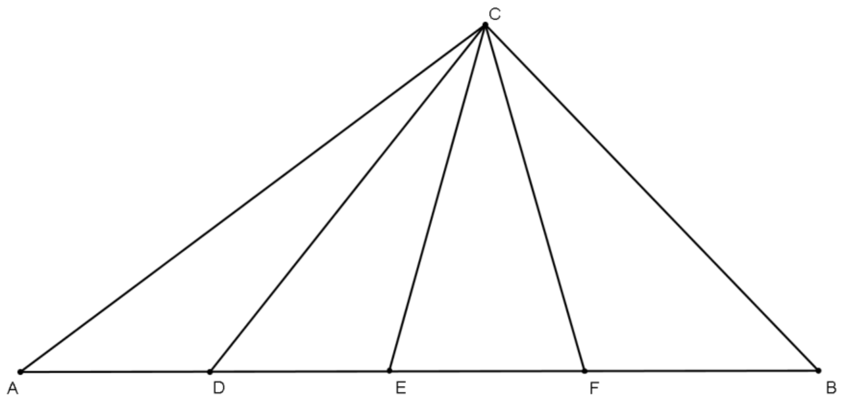
$a \cdot c = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 17$

$b \cdot c = 5 \cdot 5 \cdot 17.$

Slijedi $b = 5 \cdot 5 = 25$ i $a = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$. 2 BODA
Traženi umnožak prvog i drugog broja je $a \cdot b = 32 \cdot 25 = 800$. 1 BOD
…………………………………………………………………...………… UKUPNO 6 BODOVA

4. Broj je djeljiv s 3 ako je zbroj njegovih znamenaka djeljiv s 3 pa je
zbroj $9 + a + 6 + b + 9 = 24 + a + b$ djeljiv s 3. 1 BOD
Kako su a i b prosti brojevi, onda su $a, b \in \{2,3,5,7\}$.
Za $a = 2$ imamo da je $26 + b$ djeljiv s 3 pa je $b = 7$. 1 BOD
Za $a = 3$ imamo da je $27 + b$ djeljiv s 3 pa je $b = 3$. 1 BOD
Za $a = 5$ imamo da je $29 + b$ djeljiv s 3 pa je $b = 7$. 1 BOD
Za $a = 7$ imamo da je $31 + b$ djeljiv s 3 pa je $b \in \{2,5\}$. 1 BOD
Traženi brojevi su 92679, 93639, 95679, 97629, 97659. 1 BOD
………………………………………………………………………………….. UKUPNO 6 BODOVA
Napomena: Točni odgovori bez obrazloženja donose 4 boda.

5. Prvi način:
Na dužini $\overline{AB}$ istaknuto je pet točaka koje određuju (5 · 4) : 2 = 10 dužina. 2 BODA
Postoji još 5 dužina kojima je jedna krajnja točka na dužini $\overline{AB}$, a druga je točka C. 1 BOD
Dakle, na slici je ukupno 15 dužina. 1 BOD
Kako svaka istaknuta dužina s dužine $\overline{AB}$ s točkom C određuje jedan trokut, na slici je ukupno
10 trokuta. 2 BODA
……………………………………………………………………….………. UKUPNO 6 BODOVA
Drugi način:



Dužine su $\overline{AD}, \overline{AE}, \overline{AF}, \overline{AB}, \overline{DE}, \overline{DF}, \overline{DB}, \overline{EF}, \overline{EB}, \overline{FB}, \overline{CA}, \overline{CD}, \overline{CE}, \overline{CF}, \overline{CB}$ te ih ima
ukupno 15. 4 BODA
Trokuti su $\Delta ADC, \Delta AEC, \Delta AFC, \Delta ABC, \Delta DEC, \Delta DFC, \Delta DBC, \Delta EFC, \Delta EBC, \Delta FBC$ te ih ima
ukupno 10. 2 BODA

……………………………………………………………………………….. UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Točni odgovori bez obrazloženja donose po 1 bod.

6. Prvi način:

Ako su stranice kvadrata duljine a cm, onda je opseg jednak $4 \cdot a$.
Duljine stranica trokuta uzastopni su brojevi, npr. b, $b+1$ i $b+2$ te je onda opseg
$3 \cdot b + 3 = 3 \cdot (b + 1)$.
Duljine susjednih stranica pravokutnika razlikuju se za 2 cm pa su njihove duljine c i $c + 2$, a opseg je $4 \cdot c + 4$. 1 BOD
Budući da su opsezi jednaki, vrijedi $4 \cdot a = 3 \cdot (b + 1)$ što znači da je a višekratnik od 3. 1 BOD
Ispituju se slučajevi: $a = 3, 6, 9, 12,.....$
Za $a = 3$ cm je $O = 4 \cdot 3 = 12$ cm te je $3 \cdot (b + 1) = 12$ odnosno $b = 3$ cm i
$4 \cdot c + 4 = 12$ odnosno $c = 2$ cm.
Duljine stranica trokuta su 3 cm, 4 cm i 5 cm, a duljine susjednih stranica pravokutnika su 2 cm i 4 cm. 2 BODA
Za $a = 6$ cm je $O = 4 \cdot 6 = 24$ cm te je $3 \cdot (b + 1) = 24$ odnosno $b = 7$ cm i
$4 \cdot c + 4 = 24$ odnosno $c = 5$ cm.
Duljine stranica trokuta su 7 cm, 8 cm i 9 cm, a duljine susjednih stranica pravokutnika su 5 cm i 7 cm. 2 BODA
Za $a = 9$ cm je $O = 4 \cdot 9 = 36$ cm te je $3 \cdot (b + 1) = 36$ odnosno $b = 11$ cm i
$4 \cdot c + 4 = 36$ odnosno $c = 8$ cm.
Duljine stranica trokuta su 11 cm, 12 cm i 13 cm, a duljine susjednih stranica pravokutnika su 8 cm i 10 cm. 2 BODA
Za $a = 12$ cm je $O = 4 \cdot 12 = 48$ cm te je $3 \cdot (b + 1) = 48$ odnosno $b = 15$ cm. Tada bi $b + 1 = 16$ cm bilo veće od 15 cm što nije moguće, a isto tako niti za još veće višekratnike broja 3. 2 BODA
…………………………………………………………………...… UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:
Kako su duljine stranica trokuta tri uzastopna prirodna broja, ispitujemo moguće slučajeve.
Za 1 cm, 2 cm, 3 cm ne dobije se trokut.
Za 2 cm, 3 cm, 4 cm opseg bi bio 9 cm što nije djeljivo s 4. 1 BOD
Za 3 cm, 4 cm, 5 cm opseg bi bio 12 cm pa bi stranice kvadrata bile duljine 3 cm. Tada je zbroj duljina susjednih stranica pravokutnika 6 cm, a duljine susjednih stranica pravokutnika su 2 cm i 4 cm. 2 BODA
Za 4 cm, 5 cm, 6 cm opseg bi bio 15 cm što nije djeljivo s 4.
Za 5 cm, 6 cm, 7 cm opseg bi bio 18 cm što nije djeljivo s 4.
Za 6 cm, 7 cm, 8 cm opseg bi bio 21 cm što nije djeljivo s 4. 1 BOD
Za 7 cm, 8 cm, 9 cm opseg bi bio 24 cm pa bi stranice kvadrata bile duljine 6 cm. Tada je zbroj duljina susjednih stranica pravokutnika 12 cm, a duljine susjednih stranica pravokutnika su 5 cm i 7 cm. 2 BODA
Za 8 cm, 9 cm, 10 cm opseg bi bio 27 cm što nije djeljivo s 4.
Za 9 cm, 10 cm, 11 cm opseg bi bio 30 cm što nije djeljivo s 4.
Za 10 cm, 11 cm, 12 cm opseg bi bio 33 cm što nije djeljivo s 4. 1 BOD
Za 11 cm, 12 cm, 13 cm opseg bi bio 36 cm pa bi stranice kvadrata bile duljine 9 cm. Tada je zbroj duljina susjednih stranica pravokutnika 18 cm, a duljine susjednih stranica pravokutnika su 8 cm i 10 cm. 2 BODA
Za 12 cm, 13 cm, 14 cm opseg bi bio 39 cm što nije djeljivo s 4.
Za 13 cm, 14 cm, 15 cm opseg bi bio 42 cm što nije djeljivo s 4.
Za 14 cm, 15 cm, 16 cm bi stranica imala duljinu veću od dopuštenih 15 cm. 1 BOD
…………………………………………………………………...… UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Točni odgovori bez obrazloženja donose po 2 boda.

7. Kako je zbroj $m + 13$ djeljiv s 13, a i pribrojnik 13 je djeljiv s 13, onda i m mora biti djeljiv s 13. 2 BODA

S obzirom da je razlika $m - 17$ djeljiva sa 17, a i umanjitelj 17 je djeljiv sa 17, onda i m mora biti djeljiv sa 17. 2 BODA

Budući da kada se m podijeli s 2 dobijemo količnik djeljiv s 2, onda je m djeljiv s 4. 2 BODA
Dakle, m je troznamenkasti broj djeljiv s 13, 17 i 4. 1 BOD
Kako je $V(13,17,4) = 884$, onda je $m = 884$. 3 BODA
……………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA
Napomena: Točan odgovor bez obrazloženja donosi 4 boda.